XXIII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyszalonta, 2013. január 31 - február 3.

IX. osztály

II. forduló

1. Feladat. Határozd meg azokat az $x, y \in [a, b]$ számokat, amelyekre $\sqrt{(x-a)(b-y)} + \sqrt{(y-a)(b-x)} = b - a$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ rögzített számok és $a < b$.

2. Feladat. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat elemeire $a_1 = a \geq 1$ és

$$\frac{2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{3}{a_n} - \frac{3}{a_{n+1}},$$

bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Határozd meg az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat általános tagját!

3. Feladat. Egy háromszög kerülete $12m$ és az oldalaira írt négyzetek területének összege $48m^2$. Számítsd ki a háromszög területét!

4. Feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben M az (AB), N pedig a (BC) felezőpontja, $\{E\} = AN \cap BD$ és $\{F\} = DM \cap AC$. Bizonyítsd be, hogy $ABCD$ pontosan akkor paralelogramma, ha

$$\frac{BE}{BD} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}.$$

Megjegyzések

- munkaidő 3 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár.

10. osztály

II. forduló

1. Feladat. Határozd meg az

$$(1+iz)^6 = i\left(1+z^2\right)^3$$

egyenlet összes komplex megoldását!

2. Feladat. Határozd meg a

$$2^x + 9^x + 2 = 3^{x+1} + 4^x$$

egyenlet valós megoldásait!

3. Feladat. Az ABC nem egyenlő oldalú háromszögben A-nak a B szerinti, B-nek a C szerinti és C-nek az A szerinti szimmetrikuát jelöljük A_1, B_1 illetve C_1-gyel. Bizonyítsd be, hogy ha O, M, az ABC háromszögben, O_1, M_1 pedig az $A_1B_1C_1$ háromszögben a háromszög köré írt kör középpontja illetve magasságpontja, akkor OO_1MM_1 trapéz!

Bencze Mihály, Brassó

4. Feladat. Feldarabolható-e n^2 darab egybevágó szabályos $2n^2$ oldalú sokszög úgy, hogy a darabokból ki lehessen rakni egy szabályos $2n^2$ oldalú sokszöget? Ha igen, akkor adj egy lehetséges feldarabolást!

Megjegyzések

- munkaidő 3 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár.

11. osztály

II. forduló

1. Feladat. Az $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sorozatban $a_1 = 2$, $a_2 = 12$ és

$$a_{n+2} = 2 \cdot a_{n+1} + 4 \cdot a_n, \quad n \geqslant 1.$$

Számítsd ki az $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $x_n = \cos\left(\frac{a_n \cdot \pi}{2^{n-1}}\right)$ sorozat határértékét!

2. Feladat. Adott az

$$A = \begin{pmatrix} 1+a^2+a^4 & 1+ab+a^2b^2 & 1+ac+a^2c^2 \\ 1+ab+a^2b^2 & 1+b^2+b^4 & 1+bc+b^2c^2 \\ 1+ac+a^2c^2 & 1+bc+b^2c^2 & 1+c^2+c^4 \end{pmatrix}$$

mátrix, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$. Írd fel az A mátrix determinánsát a, b, c-ben elsőfokú kifejezések szorzataként!

3. Feladat. Adottak a síkban az $A_n(x^n, y^n)$, $x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ pontok és a $(t_n)_{n\geqslant 2}$ sorozat, ahol t_n az $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ háromszög területét jelenti. Határozd meg az A_1 pont koordinátáit, ha a $(t_n)_{n\geqslant 2}$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \frac{3}{8}$.

4. Feladat. Adott $a > 0$ és $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ szám segítségével értelmezzük az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot a következő módon:

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^{p-1} + 1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Konvergens-e az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat?

b) Számítsd ki a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt[p]{n}}$$

határértéket!

Megjegyzések

- munkaidő 3 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár.

XXIII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyszalonta, 2013. január 31 - február 3.

12. osztály
II. forduló

1. Feladat. Az ABC háromszög két csúcspontja $A(3,1)$ és $B(5,5)$. A háromszög köré írt kör érinti az Ox tengelyt és nincs közös pontja az Oy tengellyel. Határozd meg a háromszög harmadik csúcspontjának koordinátáit úgy, hogy az ABC háromszög területe a lehető legnagyobb legyen!

2. Feladat. Adottak a $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = x^3 - x + 2$ és $Q(x) = x^2 + 5x + 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$ függvények. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan injektív függvény, amelyre a $P \circ f$ és a $Q \circ f$ függvényeknek létezik primitív függvénye, bizonyítsd be, hogy f folytonos!

3. Feladat. Adott a következő sorozat:

$$a_1 = 6, a_2 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - 3a_n + 3}, n \geq 2.$$

a) Mennyi a sorozat 2013-dik tagjának egész része?

b) Értelmezhető-e az $X = \{a_n | n \geq 1\}$ halmazon olyan $\bigoplus : X \times X \to X$ műveletet, amelyre az $(X, \bigoplus)$ struktúra csoport és izomorf a $(\mathbb{Z}, +)$ csoporttal?

4. Feladat. Az $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ folytonos függvény teljesíti az

$$(x+1)f(f(x)) = 2xf(x) - 1, \quad x > 0$$

függvényegyenletet, ahol $f(1) \geq 2$. Számítsd ki $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ értékét!

Megjegyzések

- munkaidő 3 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár.