

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott az $A = \begin{pmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ba & 1+b^2 & bc \\ ca & cb & 1+c^2 \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ mátrix és A^* az adjungált mátrixa.

5p a) Számítsd ki az A mátrix determinánsának értékét!

5p b) Igazold, hogy $\det(A^*) = (\det A)^2$.

5p c) Igazold, hogy az $A - I_3$ mátrix rangja legfeljebb 1 lehet!

2. Legyen (G, \cdot) egy csoport. Tetszőleges $a \in G$ esetén értelmezzük az

$$f_a : G \rightarrow G, f_a(x) = ax, x \in G \text{ függvényt.}$$

5p a) Igazold, hogy f_a egy bijektív függvény, bármely $a \in G$ esetén!

5p b) Igazold, hogy $f_a \circ f_b = f_{ab}$, $\forall a, b \in G$ esetén!

5p c) Legyen $\mathcal{F}(G) = \{f_a : G \rightarrow G \mid a \in G\}$. Igazold, hogy az $\mathcal{F}(G)$ halmaz a függvények összetételével csoportot alkot!