

III. TÉTEL (30p)

1. Adott az $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ függvény és az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat úgy,
hogy $x_0 = 2$ és $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5p a) Határozd meg a függvény grafikus képének aszimptotáit!

5p b) Igazold, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat határértéke 1.

5p c) Ha $y_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n - n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, igazold, hogy az $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens!

2. Adottak az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \cos x$ és az $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x \cdot \int_0^x f(t) dt$ függvények.

5p a) Számítsd ki $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ értékét!

5p b) Igazold, hogy F páros függvény!

5p c) Határozd meg a F függvény monotonitási intervallumait!