

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ függvény.

5p a) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ határértéket!

5p b) Számítsd ki: $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

5p c) Határozd meg az f függvény grafikus képehez a $+\infty$ -ben húzott aszimptota egyenletét!

2. Adott az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat úgy, hogy $I_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Számítsd ki az I_2 értékét!

5p b) Igazold, hogy $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ sorozat határértéke zéró!