

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Az $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ számok esetén adott az
$$\begin{cases} ax + by + cz = b \\ cx + ay + bz = a \\ bx + cy + az = c \end{cases}$$
 egyenletrendszer, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

5p a) Igazold, hogy a rendszer determinánsának értéke $\Delta = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.

5p b) Oldd meg a rendszert abban az esetben, ha az kompatibilis és határozott!

5p c) Ha $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$, igazold, hogy a rendszernek végtelen sok olyan (x, y, z) megoldása van, amelyre $x^2 + y^2 = z - 1$.

2. Adott a $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_4 \right\}$ halmaz.

5p a) Határozd meg a G halmaz elemeinek számát!

5p b) Határozz meg egy olyan $A \in G$ mátrixot, amelyre teljesül, hogy $\det(A) \neq \hat{0}$ és $\det(A^2) = \hat{0}$.

5p c) Határozd meg az $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X \in G$ egyenlet megoldásainak számát!