

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f függvény értékeinek halmaza a $(0, \infty)$ intervallum!

5p b) Ha $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln f(x)$, igazold, hogy $(f(x) - x) \cdot g'(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén!

5p c) Igazold, hogy $g(x) < x$, bármely $x > 0$ esetén, ahol a g a b) alpontban megadott függvény!

2. Adott az $M = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ deriválható és } \int_0^1 f(x) dx = f(0) = f(1) \right\}$ halmaz.

5p a) Igazold, hogy az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ függvény az M halmaz eleme!

5p b) Ha f egy harmadfokú polinomfüggvény az M halmazból, igazold, hogy $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0)$.

5p c). Igazold, hogy bármely $f \in M$ esetén az $f'(x) = 0$ egyenletnek van legalább két megoldása a $(0,1)$ intervallumban!