

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009**

**II. FELADAT (30p)**

1. Adottak az  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  és  $A = aI_3 + bB + cB^2$  mátrixok,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

5p a) Határozd meg a  $B^3$  mátrixot!

5p b) Határozd meg a  $B^{-1}$  mátrixot!

5p c) Igazold, hogy  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$  esetén  $(a + b + c)\det(A) \geq 0$ .

2. Adott a  $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$  test és a  $H = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}_7\}$  halmaz.

5p a) Igazold, hogy  $H = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$ .

5p b) Igazold, hogy bármely  $a \in \mathbb{Z}_7$  esetén létezik  $x, y \in \mathbb{Z}_7$  úgy, hogy  $a = x^2 + y^2$ .

5p c) Igazold, hogy  $\{x^{2000} \mid x \in \mathbb{Z}_7\} = H$ .