

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$ függvény.

5p a) Igazold, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén az $f(x) = 3 + \frac{1}{n+1}$ egyenletnek egyetlen x_n valós megoldása van!

5p b) Igazold, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, ahol x_n az $f(x) = 3 + \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ egyenlet valós megoldása!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1)$ határértéket,

ahol x_n az $f(x) = 3 + \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ egyenlet valós megoldása!

2. Adott az $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1+t} dt$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $\int_0^a \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+a)$, $\forall a > -1$ esetén!

5p b) Igazold, hogy $f(x) < \ln(1+x)$, $\forall x > 0$ esetén!

5p c) Igazold, hogy: $f(\pi) > f(2\pi)$.