III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x\cdot\ln x}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x)=f(x)(1+\ln x),\ \forall x>0.$

5p **b)** Határozd meg az f függvény minimumát!

5p **c)** Igazold, hogy az f függvény konvex a $(0;\infty)$ intervallumon!

2. Tetszőleges $n\in\mathbb{N}^*$ szám esetén adottak az $f_n:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{x^{2n}}{1+x}$ és $g_n:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\ g_n(x)=1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{2n-1}+f_n(x)$ függvények.

5p **a)** Számítsd ki az $\int_0^1 g_2(x)dx$ értéket!

5p **b)** Igazold, hogy $0\le\int_0^1 f_n(x)dx\le\dfrac{1}{2n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén!

5p **c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}\right)$ határértéket!