

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(1+x)$ függvény.

5p a) Számítsd ki: $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

5p b) Igazold, hogy $f(x) > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$ esetén!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ határértéket!

2. Adott az $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_1^x t^x dt$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $1 + (x+1)F(x) = 2^{x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén!

5p b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow -1} F(x)$ határértéket!

5p c) Igazold, hogy létezik egy olyan $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény,

amelyre $F(x) = 1 + \int_0^x f(y) dy$, $\forall x \in (-1, \infty)$.