

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f függvény növekvő!

5p b) Jelölje minden $n \in \mathbb{N}$ szám esetén az $f(x) = n$ egyenletnek az egyetlen valós megoldását az x_n szám. Igazold, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat nem korlátos!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ határértéket, ahol $(x_n)_{n \geq 1}$ a b) alponthban értelmezett sorozat!

2. Adottak az $f, g_n: [0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g_n(x) = \frac{x^n}{1-x}$ függvények, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Számítsd ki $\int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - g_2(x)) dx$ értékét!

5p b) Igazold, hogy $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} g_n(x) dx \leq \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

5p c) Igazold, hogy: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} \right) = \ln 2$.