EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ esetén legyen az $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ mátrix és A^t a transzponáltja.

5p **a)** Ha $a = c = 1$ és $b = d = 0$, számítsd ki $\det(A)$ értékét!

5p **b)** Igazold, hogy $A \cdot A^t = \alpha \cdot I_4$, ahol $\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

5p **c)** Ha $A \neq O_4$, igazold, hogy az A mátrix invertálható!

2. Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$ és az $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ polinom, amelynek $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ gyökei teljesítik a $|x_1| \leq 1$, $|x_2| \leq 1$, $|x_3| \leq 1$ összefüggéseket.

5p **a)** Igazold, hogy $|a| \leq 3$.

5p **b)** Ha $c < 0$, igazold, hogy a polinomnak van legalább egy valós gyöke a $(0, \infty)$ intervallumban!

5p **c)** Ha $a = 1$, $c = -1$, igazold, hogy $b = -1$.