

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009**

**II. FELADAT (30p)**

1. Adottak az  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  és  $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  mátrixok,

amelyekre  $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$  és  $x_0 = 1, y_0 = 0$ .

**5p** a) Számítsd ki  $x_1, x_2, y_1$  és  $y_2$  értékét!

**5p** b) Igazold, hogy  $x_n + y_n \sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n, \forall n \in \mathbb{N}$  esetén!

**5p** c) Igazold, hogy  $x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0, \forall n \geq 0$  esetén!

2. Adottak a  $\mathbb{Z}_7 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}\}$  és  $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$  maradékosztály halmazok.

**5p** a) Oldd meg a  $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$  testben a  $\hat{3}x^2 + \hat{4} = \hat{0}$  egyenletet!

**5p** b) Határozd meg a  $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$  csoportban a  $\hat{3}$  elem rendjét!

**5p** c) Igazold, hogy egyetlen olyan  $f : (\mathbb{Z}_6, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$  csoportmorfizmus sincs, amelyre  $f(\bar{2}) = \hat{3}$ .