

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  függvény.

**5p** a) Igazold, hogy az  $f$  függvény folytonos a  $[0,1]$  intervallumon!

**5p** b) Határozd meg az  $f$  függvény deriválhatósági tartományát!

**5p** c) Igazold, hogy ha  $n \in \mathbb{N}^*$ , akkor az  $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$  egyenletnek

van legalább egy megoldása az  $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$  intervallumban!

2. Adottak az  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(1+x^2)$  és  $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x \operatorname{arctg} x$  függvények.

**5p** a) Számítsd ki az  $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$  értékét!

**5p** b) Számítsd ki az  $\int_0^1 g(x) dx$  értékét!

**5p** c) Számítsd ki az  $f$  és  $g$  függvények grafikus képei,  
valamint az  $x=0$  és  $x=1$  egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!