

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009**

**II. FELADAT (30p)**

1. Az  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  halmazban adottak az  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  és  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrixok.

**5p** a) Határozd meg az  $A + I_2$  mátrix rangját!

**5p** b) Ha  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  olyan mátrix, amelyre  $AX = XA$ , igazold, hogy létezik  $x, y \in \mathbb{C}$  úgy, hogy  $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ .

**5p** c) Igazold, hogy az  $Y^2 = A$  egyenletnek egyetlen megoldása sincs az  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  halmazban!

2. Az  $\mathbb{R}$  halmazon értelmezzük az  $x * y = x + y + xy$  műveletet.

**5p** a) Igazold, hogy a „ $*$ ” művelet asszociatív!

**b)** Adott az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 1$  függvény.

**5p** Igazold, hogy  $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  esetén!

**5p** c) Számítsd ki az  $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{2008} * \frac{1}{2009}$  értéket!