

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$ függvény.

5p a) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - f(x))^x$ határértéket!

5p b) Igazold, hogy az f szigorúan növekvő függvény!

5p c) Igazold, hogy az f bijektív függvény!

2. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és adott az $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ \ln^2 x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ függvény.

5p a) Határozd meg az a és b számokat úgy, hogy az F függvény az f függvénynek egy primitív függvénye legyen!

5p b) Számítsd ki az $\int_1^e \frac{1}{x F(x)} dx$ értékét!

5p c) Igazold, hogy a $h : [1, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = (F(x) - 1) \sin x$ függvény esetén $\int_1^\pi h(x) h''(x) dx \leq 0$.