

**Ministerul Educatiei, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \ln x$  függvény.

**5p** a) Igazold, hogy az  $f$  függvény grafikus képének nincs aszimptotája a  $+\infty$ -ben!

**5p** b) Igazold, hogy az  $f(x) = 0$  egyenletnek egyetlen  $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$  megoldása van!

**5p** c) Igazold, hogy a  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xe^x - 1}{x - x_0} = f'(x_0)$ , ahol  $x_0$  a **b)** pontban megadott szám!

2. Adott az  $(I_n)_{n \geq 1}$  sorozat, ahol  $I_n = \int_0^1 \frac{\ln(x^n + 1)}{x + 1} dx$ , bármely  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén.

**5p** a) Számítsd ki  $I_1$  értékét!

**5p** b) Igazold, hogy  $I_n$  sorozat szigorúan csökkenő!

**5p** c) Igazold, hogy:  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$  (ismertnek tekintjük azt, hogy  $\ln(1+t) \leq t$ ,  $\forall t \in (-1, \infty)$  esetén).