

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0)$, $f(x) = \ln(1+x) - x$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f függvény szigorúan csökkenő a $(0, +\infty)$ intervallumon!

5p b) Igazold, hogy az f függvény szűrjektív!

5p c) Igazold, hogy az f függvény grafikus képének nincs aszimptotája!

2. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x$ függvény.

5p a) Számítsd ki az $\int_0^1 f(x) dx$ értékét!

5p b) Igazold, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(\ln t) dt = \frac{\pi}{2}$.

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right)$ határértéket!