

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln \frac{2x+1}{2x+3}$  függvény.

5p a) Számítsd ki:  $f'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .

5p b) Igazold, hogy  $f(x) < 0$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ .

5p c) Igazold, hogy az  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right)$  sorozat szigorúan csökkenő.

2. Adott az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$  függvény.

5p a) Igazold, hogy az  $f$  függvény páratlan.

5p b) Igazold, hogy  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

5p c) Igazold, hogy:  $\int_0^1 f(x) dx \leq e - 2$ .