

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mátrix.

5p a) Igazold, hogy teljesül az $A^2 - A = 2I_3$ egyenlőség!

5p b) Számítsd ki az A^{-1} mátrixot!

5p c) Igazold, hogy: $A^{2009} + A^{2008} = 2^{2008}(A + I_3)$.

2. Ismertnek tekintjük, hogy a $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ struktúra kommutatív gyűrű, ahol

$$x * y = x + y - 3 \quad \text{és} \quad x \circ y = x \cdot y - 3x - 3y + 12, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

5p a) Igazold, hogy a „ \circ ” művelet semleges eleme 4.

5p b) Határozd meg az $a, b \in \mathbb{Z}$ számokat úgy, hogy az $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = a \cdot x + b$ függvény a $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ és $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ gyűrűk közötti izomorfizmus legyen!

5p c) Oldd meg a \mathbb{Z} halmazon az $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2009 \text{ darab } x} = 2^{2009} + 3$ egyenletet!