

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adottak az $f_n : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + \ln x$, $n \in \mathbb{N}^*$ függvények.

5p a) Határozd meg az f_1 függvény grafikus képének aszimptotáit!

5p b) Bizonyítsd be, hogy a $g_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) = f_n(x) + f_n\left(\frac{1}{x}\right)$ függvény konvex!

5p c) Ismertnek tekintjük azt, hogy az $f_n(x) = 2^n$ egyenletnek egyetlen x_n megoldása van. Igazold, hogy az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat konvergens és határértéke 2.

2. Legyen $a \in [0, 1]$ és $I_n = \int_0^a \frac{t^n}{t+1} dt$, $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

5p a) Számítsd ki I_2 értékét!

5p b) Igazold, hogy $I_n + I_{n-1} = \frac{a^n}{n}$, $\forall n \geq 2$ esetén!

5p c) Igazold, hogy: $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.