

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ függvény.

5p a) Határozd meg a függvény grafikus képének aszimptotáját a $+\infty$ -ben!

5p b) Számítsd ki: $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5p c) Igazold, hogy az f függvény konkáv a $(-\infty, -1)$ intervallumon!

2. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^*$ esetén értelmezzük az $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = |\sin nx|$ függvényt

és az $I_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f_n(x)}{x} dx$ számot.

5p a) Számítsd ki az $\int_0^{\pi} f_2(x) dx$ értékét!

5p b) Igazold, hogy: $I_n \leq \ln 2$.

5p c) Mutasd ki, hogy: $I_n \geq \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$.