

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009**

**II. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  mátrix.

**5p** a) Számítsd ki az  $A$  mátrix rangját!

**5p** b) Igazold, hogy  $\det(A^t \cdot A) = 0$ , ahol  $A^t$  az  $A$  mátrix transzponáltja!

**5p** c) Határozz meg egy  $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Q})$  zérusmátrixtól különböző mátrixot úgy, hogy teljesüljön az  $AB = O_2$  egyenlőség!

2. Ismertnek tekintjük, hogy a  $(G, \circ)$  struktúra csoport, ahol  $G = (3, \infty)$  és  $x \circ y = (x-3)(y-3) + 3$ . Adott az  $f : (0, \infty) \rightarrow G$ ,  $f(x) = x+3$  függvény.

**5p** a) Számítsd ki  $4 \circ 5 \circ 6$  értékét!

**5p** b) Igazold, hogy az  $f$  függvény a  $((0, \infty), \cdot)$  és a  $(G, \circ)$  csoportok közötti izomorfizmus!

**5p** c) Ha  $H$  egy olyan részhalmaza a  $G$ -nek, amely tartalmazza az összes  $k \geq 4$  természetes számot, igazold, hogy a  $H$  halmaz tartalmazza az összes  $q > 3$  racionális számot!