EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adottak az $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ és a $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ mátrixok valamint az

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=3\\ y+2z+3t=2\\ z+2t=1\end{cases}$$ egyenletrendszer.

5p **a)** Határozd meg az A mátrix rangját!

5p **b)** Határozd meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát!

5p **c)** Igazold, hogy az $XA=B$ egyenletnek nincs $X\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$ megoldása!

2. Adott a $G=\left\{A(k)=\begin{pmatrix}2^k & 2^k\\ 2^k & 2^k\end{pmatrix} \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ halmaz és minden $t\in\mathbb{Z}$ szám esetén értelmezzük a $H_t=\left\{A(kt-1)\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ halmazt. Ismertnek tekintjük, hogy a $(G,\cdot)$ struktúra csoport, ahol a „ $\cdot$ ” művelet a mátrixok szorzása.

5p **a)** Igazold, hogy $\forall\, n,\, p\in\mathbb{Z}$ esetén $A(n)\cdot A(p)=A(n+p+1)$.

5p **b)** Igazold, hogy bármely $t\in\mathbb{Z}$ esetén, H_t részcsoportja a $(G,\cdot)$ csoportnak!

5p **c)** Igazold, hogy a $(G,\cdot)$ és $(\mathbb{Z},+)$ izomorf csoportok!