

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott az $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mátrix, amelynek minden eleme 1.

5p a) Igazold, hogy $A^2 = 3A$.

5p b) Számítsd ki $\det(I_3 + A^3)$ értékét!

5p c) Ha $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ egy olyan mátrix, amelyre $AB = BA$, igazold, hogy a B mátrix minden sorában és minden oszlopában az elemek összege ugyanannyi!

2. Legyen $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\mathbb{Q}(\varepsilon) = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

5p a) Igazold, hogy $\varepsilon^2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$.

5p b) Bizonyítsd be, hogy a $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ halmaz bármely nullától különböző elemének inverze a $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ halmazban van!

5p c) Igazold, hogy az $M = \{a^2 - ab + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmaz a \mathbb{Z} zárt részhalmaza a szorzásra vonatkozóan!