EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Legyen $a,b,c,d>0$, az $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix és az $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ függvény.

Legyen $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, ahol $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Ha $\det A=0$, igazold, hogy az f állandó függvény!

5p **b)** Ha $\det A\neq 0$, igazold, hogy f függvény injektív!

5p **c)** Igazold, hogy $\underbrace{\left(f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f\right)}_{n-\text{darab } f}(x)=\dfrac{a_nx+b_n}{c_nx+d_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén!

2. Adottak az $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok és a $G=\{I_2+aA+bB \mid a,b\in\mathbb{R},\ a\neq -1\}$ halmaz.

5p **a)** Igazold, hogy a G halmaz minden mátrixa invertálható!

5p **b)** Igazold, hogy G az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmaz invertálható mátrixaiból alkotott multiplikatív csoport részcsoportja!

5p **c)** Igazold, hogy az $X^2=I_2$ egyenletnek végtelen sok megoldása van a G halmazban!