III. TÉTEL (30p)

1. Adott az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat úgy, hogy $x_1 \in (0,1)$ és $x_{n+1} = \dfrac{x_n^5 + 3x_n}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Igazold, hogy $x_n \in (0,1), \forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

5p **b)** Igazold, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat konvergens!

5p **c)** Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+2}}{x_n} = \dfrac{9}{16}$.

2. Adott az $xf(x) = \sin x, \ \forall x \in \mathbb{R}$ tulajdonsággal rendelkező $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény.

5p **a)** Számítsd ki az $\int_0^{\pi} x^2 f(x)\,dx$ értékét!

5p **b)** Igazold, hogy az f függvény integrálható a $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ intervallumon!

5p **c)** Igazold, hogy $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \le \cos 1$.