

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott az $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix, amelyre teljesül az $A^2 = 2A$ egyenlőség.

5p a) Igazold, hogy a $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix teljesíti a $B^2 = 2B$ egyenlőséget!

5p b) Ha $a + d \neq 2$, igazold, hogy $A = O_2$ vagy $A = 2I_2$.

5p c) Ha $a + d = 2$, igazold, hogy $\det(A) = 0$.

2. Adottak az $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 1$, $g = X^6 - 1$ polinomok.

5p a) Igazold, hogy az f és g polinomok egy legnagyobb közös osztója az $X^2 - 1$ polinom!

5p b) Hány különböző komplex megoldása van az $f(x)g(x) = 0$ egyenletnek?

5p c) Bontsd fel az f polinomot a $\mathbb{Q}[X]$ -ben irreducibilis tényezőkre!