

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \arctg x$ függvények.

5p a) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)g(x))$ határértéket!

5p b) Határozd meg az f függvény helyi szélsőérték-pontjait!

5p c) Igazold, hogy $f(x) < g(x)$, bármely $x \in (0, \infty)$ esetén!

2. Adott az $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - m, & x \in [0, 1] \\ x \ln x, & x \in (1, 2] \end{cases}$ függvény, ahol $m \in \mathbb{R}$.

5p a) Igazold, hogy bármely $m \in \mathbb{R}$ esetén a függvény integrálható!

5p b) Számítsd ki a $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\int_1^x t \ln t \, dt}{x - 1}$ határértéket!

5p c) Ha $m = 1$, igazold, hogy bármely $t \in (0, 2)$ esetén léteznek olyan $a, b \in [0, 2]$, $a \neq b$ értékek, amelyekre $\int_a^b f(x) \, dx = (b - a)f(t)$.