

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x - \operatorname{arcctg} x$ függvény.

5p a) Határozd meg az f függvény grafikus képének aszimptotáját a $+\infty$ -ben!

5p b) Igazold, hogy az f függvény szigorúan növekvő \mathbb{R} -en!

5p c) Ha $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ és $x_1 = 0$, igazold, hogy az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat konvergens!

2. Adott az $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x \cdot f(x)$ függvénynek olyan primitív függvényei vannak, amelyek szigorúan növekvő függvények!

5p b) Számítsd ki az $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ értékét!

5p c) Igazold, hogy: $\int_0^1 x f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$.