

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott az $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix.

5p a) Igazold, hogy $\det(A \cdot A^t) \geq 0$.

5p b) Ha $A \cdot A^t = A^t \cdot A$, igazold, hogy $(a-d)(b-c) = 0$.

5p c) Ha $(A - A^t)^{2009} = A - A^t$, igazold, hogy $|b-c| \in \{0,1\}$.

2. Adott a $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ test.

5p a) Oldd meg a \mathbb{Z}_7 halmazban a $\hat{2}x = \hat{3}$ egyenletet!

5p b) Igazold, hogy a $p = \hat{2}X^2 + \hat{4} \in \mathbb{Z}_7[X]$ polinomnak nincsenek gyökei a \mathbb{Z}_7 halmazban!

5p c) Bizonyítsd be, hogy az $f: \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_7$, $f(x) = \hat{2}x$ függvény a $(\mathbb{Z}_7, +)$ csoport egy automorfizmusa!