

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \arctg x$  függvény.

5p a) Határozd meg az  $f$  függvény grafikus képéhez az  $x = 1$  abszcisszájú pontban húzott érintő egyenletét!

5p b) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - f(x)}{x^3}$  határértéket!

5p c) Igazold, hogy a  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (x - 1)f(x)$  függvénynek egyetlen szélsőérték-pontja van!

2. Adott az  $(I_n)_{n \geq 1}$ ,  $I_n = \int_0^1 x^n \sin x \, dx$  sorozat.

5p a) Számítsd ki az  $I_1$  értékét!

5p b) Igazold, hogy az  $(I_n)_{n \geq 1}$  sorozat konvergens!

5p c) Bizonyítsd be, hogy  $I_{2n} + 2n(2n - 1)I_{2n-2} = 2n \sin 1 - \cos 1$ ,  $\forall n \geq 2$  esetén!