

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix esetén minden $A(x, y)$ ponthoz hozzárendeljük az $A_M(x', y')$ pontot az $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ egyenlőség alapján.

5p a) Határozd meg az A_M pont koordinátáit, ha $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$ és $A(-1, 1)$.

5p b) Ha $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 4$, igazold, hogy mindenik A_M pont az $y = 2x$ egyenesen helyezkedik el!

5p c) Legyen A, B, C három pont a síkban. Ha S és S_M az ABC illetve az $A_M B_M C_M$ háromszögek területe, igazold, hogy $S_M = S \cdot |\det M|$.

2. Adott az $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ \hat{0} & a & d \\ \hat{0} & \hat{0} & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ halmaz.

5p a) Határozd meg az A halmaz elemeinek számát!

5p b) Igazold, hogy az A halmaz zárt az $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2)$ halmazbeli mátrixok szorzására vonatkozóan!

5p c) Oldd meg az $X^2 = X$, $X \in A$ egyenletet!