III. FELADAT (30p)

1. Értelmezzük minden $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ esetén az $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n - nx + 1$ függvényeket.

5p **a)** Igazold, hogy az f_n szigorúan csökkenő a $[0;1]$ intervallumon és szigorúan növekvő az $[1;\infty)$ intervallumon!

5p **b)** Igazold, hogy az $f_n(x) = 0,$ egyenletnek két $a_n \in (0;1)$ és $b_n \in (1;\infty)$ megoldása van, ha $x > 0$.

5p **c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ határértéket, ahol a_n a **b)** alpontban értelmezett számok sorozata!

2. Adott az $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, ahol $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$ és $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Igazold, hogy $I_0 = \frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Igazold, hogy $I_{2n} = \frac{1}{2n-1} - I_{2n-2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ esetén!

5p **c)** Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1}\right) = I_0$.