

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott az
$$\begin{cases} x + ay + (a+b)z = a+b \\ x + a^2y + (a^2+b^2)z = a^2+b^2 \\ x + a^3y + (a^3+b^3)z = a^3+b^3 \end{cases}$$
 egyenletrendszer, $a, b \in \mathbb{R}$.

5p a) Számítsd a rendszer mátrixának determinánsát!

5p b) Határozd meg $a, b \in \mathbb{R}$ értékeit úgy, hogy a rendszer kompatibilis, határozott legyen!

5p c) Igazold, hogy az a és b valós paraméterek tetszőleges értéke esetén a rendszernek van megoldása!

2. Adott az $f = \hat{2}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_4[X]$ polinom.

5p a) Határozd meg az f^2 polinom fokszámát!

5p b) Igazold, hogy az f polinom a $(\mathbb{Z}_4[X], +, \cdot)$ gyűrű invertálható eleme!

5p c) Határozd meg az összes olyan $g \in \mathbb{Z}_4[X]$ elsőfokú polinomot,
amelyek teljesítik az $g^2 = \hat{1}$ egyenlőséget!