EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott az n-ed rendű, $n \geq 2$, $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$ determináns.

5p **a)** Számítsd ki $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ értékét!

5p **b)** Igazold, hogy $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}, \forall n \geq 4$ esetén!

5p **c)** Igazold, hogy $D_n = n+1, \forall n \geq 2$ esetén!

2. Egy $(G,\cdot)$ multiplikatív csoport, amelynek semleges eleme e, rendelkezhet a következő *(p)* tulajdonsággal: (p) ”bármely $x \in G$ esetén $x^2 = e$ ”.

5p **a)** Igazold, hogy a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ halmaz az $(a,b)\cdot(c,d) = (a+c,\, b+d), \forall a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2$ művelettel egy olyan csoportot alkot, amely rendelkezik a (p) tulajdonsággal!

5p **b)** Ha egy G csoport rendelkezik a (p) tulajdonsággal, igazold, hogy $(xy)^2 = x^2y^2, \forall x, y \in G$ esetén!

5p **c)** Igazold, hogy minden (p) tulajdonságú csoport kommutatív!