

II. FELADAT (30p)

1. Adott a $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ halmaz.

5p a) Igazold, hogy $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ és $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin G$.

5p b) Igazold, hogy bármely két $A, B \in G$ mátrix esetén teljesül az $A \cdot B = B \cdot A$ egyenlőség!

5p c) Igazold, hogy a G bármely mátrixának inverze is a G halmaz eleme!

2. Adott az $f = mX^3 + 11X^2 + 7X + m$, $f \in \mathbb{R}[X]$ polinom.

5p a) Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az f polinom osztható legyen a $g = X - 1$ polinommal!

5p b) Határozd meg az $m \in \mathbb{Q}$ értékét úgy, hogy $f(\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$ legyen!

5p c) Számítsd ki az f polinom gyökeinek négyzetösszegét, ha $m = -9$.