II. FELADAT (30p)

1. Adott az $M=\left\{A(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \middle|\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$ halmaz és az $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix.

5p **a)** Számítsd ki az $A(1,1)$ mátrix determinánsát!

5p **b)** Bizonyítsd be, hogy ha $A,B\in M$ akkor $A+B\in M$.

5p **c)** Igazold, hogy $\det\left(I_2-A(0,b)\right)\neq 0$, bármely $b\in\mathbb{R}$ esetén!

2. Adott a $\mathbb{Z}_3[X]$ polinomgyűrű.

5p **a)** Ha $g\in\mathbb{Z}_3[X]$, $g=\left(X+\hat{2}\right)^2\left(X+\hat{1}\right)$, számítsd ki $g\left(\hat{0}\right)$ értékét!

5p **b)** Ha $f\in\mathbb{Z}_3[X]$, $f=X^3+\hat{2}X$, igazold, hogy $f(x)=\hat{0}$, bármely $x\in\mathbb{Z}_3$ esetén!

5p **c)** Határozd meg az összes olyan $h\in\mathbb{Z}_3[X]$ harmadfokú polinomot, amelyekre $h\left(\hat{0}\right)=h\left(\hat{1}\right)=h\left(\hat{2}\right)=\hat{0}$.