

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - x - 1$  függvény.

**5p**    **a)** Számítsd ki az  $f$  függvény deriváltját!

**5p**    **b)** Határozd meg az  $f$  függvény monotonitási intervallumait!

**5p**    **c)** Igazold, hogy  $e^{x^2} + e^x \geq x^2 + x + 2$ , bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén!

2. Adottak az  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 + \ln x$  és  $g(x) = x \ln x$  függvények.

**5p**    **a)** Igazold, hogy a  $g$  függvény az  $f$  függvény egy primitív függvénye!

**5p**    **b)** Számítsd ki:  $\int_1^e f(x) \cdot g(x) dx$ .

**5p**    **c)** Számítsd ki a  $g$  függvény grafikus képe, az  $Ox$  koordinátatengely, valamint az  $x=1$  és  $x=e$  egyenesek által határolt síkidom területét!