

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$, bármely $x > 0$ esetén!

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez az $A(1; -2)$ pontban húzott érintő egyenletét!

5p c) Bizonyítsd be, hogy $x + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 3$ bármely $x > 0$ esetén!

2. Adottak az $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{x^n}$ függvények, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

5p a) Számítsd ki: $\int_1 f_1(x) dx$.

5p b) Számítsd ki az $\int_0^1 x \cdot f_1(x) dx$ értékét!

5p c) Számítsd ki a $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x \cdot f_3(x)$ függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!