

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e} \cdot e^x - 1, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ függvény.

5p a) Tanulmányozd az f függvény folytonosságát az $x_0 = 1$ pontban!

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képe aszimptotájának egyenletét $-\infty$ felé!

5p c) Igazold, hogy az f függvény konkáv az $(1, +\infty)$ intervallumon!

2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$ függvény.

5p a) Számítsd ki: $\int (x^2 + 1) \cdot f(x) dx$.

5p b) Igazold, hogy $\int_0^1 f(x) dx = \ln(2e)$.

5p c) Igazold, hogy $\int_0^1 f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e(e - 1)$.