

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$ függvény.

5p a) Tanulmányozd az f függvény folytonosságát az $x_0 = 0$ pontban!

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képe $-\infty$ felé mutató aszimptotájának egyenletét!

5p c) Igazold, hogy az f függvény konkáv a $(0, +\infty)$ intervallumon!

2. Adottak az $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ és $g(x) = x$ függvények.

5p a) Számítsd ki: $\int f(\sqrt{x}) dx$.

5p b) Számítsd ki az $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$ értékét!

5p c) Igazold, hogy $\int_0^1 f(x^{50}) \cdot g^{99}(x) dx = \frac{e-1}{100}$.