

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2 + (x-1)^2$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x) = 4x$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén!

5p **b)** Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$ határértéket!

5p **c)** Határozd meg a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ függvény monotonitási intervallumait!

2. Adott az $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \ln x$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int g(x) dx = g(x) + C$, $x > 0$, ha $g: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \ln x$.

5p **b)** Számítsd ki: $\int_1^e f(x) dx$.

5p **c)** Igazold, hogy $\int_1^e x f(x^2) dx = \frac{e^{e^2} + e^2 - e + 1}{2}$.