

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 1$ függvény.

5p a) Számítsd ki $f'(1)$ -et!

5p b) Határozd meg az f függvény konvexitási és konkavitási intervallumait!

5p c) Igazold, hogy $f(x) \leq 3$, bármely $x \leq 2$ esetén!

2. Adottak az $f, F: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ és $F(x) = x + \frac{1}{x}$ függvények.

5p a) Igazold, hogy az F függvény egy primitív függvénye az f függvénynek!

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képe, az Ox koordinatengely, valamint az $x=1$ és $x=2$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét !

5p c) Számítsd ki: $\int_1^e F(x) \cdot \ln x \, dx$.