

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \setminus \{e\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$ függvény.

5p a) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ határértéket!

5p b) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{2}{x(1 - \ln x)^2}$, bármely $x \in (0, +\infty) \setminus \{e\}$ esetén!

5p c) Határozd meg az f függvény grafikus képe vízszintes aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ felé!.

2. Adottak az $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ és $g(x) = \frac{1}{x}$ függvények.

5p a) Határozd meg az $f + g$ függvény primitív függvényeinek halmazát.

5p b) Igazold, hogy $\int_1^2 (f^2(x) + g^2(x)) dx = \frac{e^4 - e^2 + 1}{2}$.

5p c) Ismertnek tekintjük az $2ab \leq a^2 + b^2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ egyenlőtlenséget. Esetleg ennek felhasználásával igazold, hogy $\int_1^2 e^x \cdot \frac{1}{x} dx \leq \frac{e^4 - e^2 + 1}{4}$.