

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ esetén!

5p b) Határozd meg a f függvény grafikus képe $+\infty$ felé mutató ferde aszimptotájának egyenletét.

5p c) Igazold, hogy $f(x) \geq 4$, bármely $x \in (1; +\infty)$ esetén!

2. Adottak az $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{e^x}{e^{nx} + 1}$ függvények, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

5p a) Számítsd ki: $\int f_0(x) dx$, ha $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Határozd meg az f_1 függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

5p c) Igazold, hogy $\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén!