

**III. FELADAT (30p)**

1. Adottak az  $f, h: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-1)(x-2)$  és  $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$  függvények.

5p a) Igazold, hogy  $h(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ .

5p b) Igazold, hogy a  $h$  függvény csökkenő a  $(-\infty; 1)$  intervallumon!

5p c) Igazold, hogy  $(f'(x))^2 \geq f(x) \cdot f''(x)$ , bármely  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$  esetén!

2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{2009} + x + 1$  függvény.

5p a) Számítsd ki a  $h: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = f(x) - x^{2009} - 1$  függvény grafikus képének  $Ox$  koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!

5p b) Határozd meg az  $f$  függvény azon  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  primitív függvényét, amelyre  $F(0) = 1$ .

5p c) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^{2010}}$  határértéket!