

III. FELADAT (30p)

1. Adottak az $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ és $g(x) = \frac{x - 1}{e^x}$ függvények.

5p a) Igazold, hogy $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 0$.

5p b) Számítsd ki az f függvény szélsőértékpontjának koordinátáit!

5p c) Igazold, hogy $g(x) - f(x) \leq 1 + \frac{1}{e^2}$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén!

2. Adottak az $f, g : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x + 1}$ és $g(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1}$ függvények.

5p a) Igazold, hogy $\int_0^1 f(x) dx = \ln 2$.

5p b) Számítsd ki: $\int_0^1 g(x) dx$.

5p c) Igazold, hogy létezik $x_0 \in (0; 1)$ úgy, hogy $f(x_0) < g(x_0) - 2x_0$.