

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3^x + 1, & x \leq 1 \\ ax + 2, & x > 1 \end{cases}$ függvény.

5p a) Határozd meg az a valós paramétert úgy, hogy az f függvény folytonos legyen az $x_0 = 1$ pontban!

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képe $-\infty$ felé mutató vízszintes aszimptotájának egyenletét!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((f(x) - 1) \cdot x)$ határértéket!

2. Adott az $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ függvény.

5p a) Határozd meg az $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy az F függvény az f függvény egyik primitív függvénye legyen!

5p b) Igazold, hogy a F függvény csökkenő a $[0, +\infty)$ intervallumon!

5p c) Bizonyítsd be, hogy $\frac{1}{6} \leq \int_0^1 F(x) dx \leq \frac{1}{2}$.