

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f(1) - f'(1) = 1$.

5p **b)** Határozd meg az f függvény szélsőértékpontját!

5p **c)** Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{x}$ határértéket!

2. Adott az $I = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx$ és a $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{x+1} dx$ integrál.

5p **a)** Igazold, hogy $I + J = e - 1$.

5p **b)** Ismert az $e^x \geq x + 1$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, egyenlőtlenség. Esetleg ennek felhasználásával igazold, hogy $J \geq \frac{1}{2}$

5p **c)** Igazold, hogy $I = \frac{e-2}{2} + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx$.