II. FELADAT (30p)

1. Adottak az $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Legyen $A^2 = A \cdot A$.

5p **a)** Számítsd ki az A^2 mátrixot!

5p **b)** Igazold, hogy $A^2 = aI_2 + bA$, ahol $A^2 = A \cdot A$.

5p **c)** Ha $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ és $AX = XA$, igazold, hogy létezik $m, n \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $X = mI_2 + nA$.

2. Adott az $f = X^4 + aX^3 - X - 1$ polinom, ahol $a \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Határozd meg az a számot, ha $x = 1$ gyöke az f polinomnak!

5p **b)** Ha $a = 1$, határozd meg az f polinom valós gyökeit!

5p **c)** Igazold, hogy $f(x) \neq 0$, bármely $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.