

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{1}{e^x}$ függvény.

5p a) Számítsd ki az $f(0) + f'(0)$ összeget!

5p b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f'(x)}{x}$ határértéket!

5p c) Igazold, hogy az f függvény konkáv az \mathbb{R} -en!

2. Adottak az $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$, $g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{2008} - x^{2009}$ függvények.

5p a) Határozd meg az f függvény primitív függvényeinek halmazát!

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!

5p c) Igazold, hogy $\int_0^1 (x+1)g(x)dx < 1$.